

[illegible]

a_{ij} coefficienti ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)

$$x_j \textit{incognite} \ (j = 1, 2, \dots, n)$$

b_i termini noti ($i = 1, 2, \dots, m$)

[illegible]

$A = (a_{ij})$: matrice dei coefficienti ($m \times n$)

$X = (x_j)$: matrice delle incognite ($n \times 1$)

$\mathbf{N} = (\mathbf{b}_j)$: matrice dei termini noti ($m \times 1$)

$$i = 1, 2, \dots, m \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \dots, n$$



$$AX=N$$

[illegible]

sistema lineare di ordine $m \times n$



è *omogeneo* se
in esso sono nulli tutti i termini noti

[illegible]

sistema lineare di ordine $m \times n$



$$(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

è ***soluzione*** del sistema se

sostituita a $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$

soddisfa tutte le equazioni del sistema

sistema lineare di ordine $m \times n$

impossibile

il sistema
non ha soluzioni

possibile

determinato

il sistema ha
una sola soluzione

indeterminato

il sistema ha
infinite soluzioni

I SISTEMI LINEARI: RISOLUZIONE

$$AX = N$$

sistema lineare di ordine $m = n$

(il numero delle equazioni coincide
con il numero delle incognite)



il sistema è *quadrato*

[illegible]

sistema lineare quadrato ($m = n$)



Teorema di Cramer

il sistema ammette *una ed una sola* soluzione



$$\Delta = \det A \neq 0$$

[illegible]

il sistema ammette *una ed una sola* soluzione



Formule di Cramer

$$\left(x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \right)$$

**Δ_i è il determinante della matrice ottenuta da A
sostituendo la i -esima colonna con
la colonna dei termini noti**

Osservazione!

Il Teorema di Cramer è un teorema di
esistenza ed unicità



se

$$\Delta = \det A = 0$$



indeterminato



il sistema ha
infinite soluzioni



impossibile



il sistema *non*
ha soluzioni

Osservazione!

[illegible]

sistema lineare quadrato ed omogeneo
con $\Delta = \det A \neq 0$



Teorema di Cramer

esiste *solo* la *soluzione banale*

$$(x_1 = 0, \dots, x_i = 0, \dots, x_n = 0)$$

Osservazione!

$$AX = N$$

sistema lineare quadrato con $\Delta = \det A \neq 0$



A ammette l'inversa A^{-1}



*metodo della
matrice inversa*

$$X = A^{-1}N$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

fornisce la soluzione del sistema

Esempio 1

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

**sistema lineare quadrato di ordine 3
(3 equazioni nelle 3 incognite x, y, z)**



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + 1 - 2 = 1 \neq 0$$

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$



teorema di Cramer

il sistema ammette una ed una sola soluzione



formule di Cramer

$$\left(x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

Δ_x , Δ_y e Δ_z sono i determinanti delle matrici ottenute da A sostituendo rispettivamente la colonna dei coefficienti della x , della y e della z con la colonna dei termini noti

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 2 = -1 \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 2 - 2 = 0 \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 1 - 2 = 2 \end{aligned}$$



$$\left(x = \frac{-1}{1}, y = \frac{0}{1}, z = \frac{2}{1} \right) \longrightarrow (x, y, z) = (-1, 0, 2)$$

è l'unica soluzione del sistema

Verifica della soluzione

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad (x, y, z) = (-1, 0, 2)$$



sostituendo nel sistema

$$\begin{cases} -1 + 2 = 1 & o.k.! \\ 2(-1) + 0 + 2(2) = -2 + 4 = 2 & o.k.! \\ -(-1) + 0 = 1 & o.k.! \end{cases}$$



$$(x, y, z) = (-1, 0, 2)$$

soddisfa tutte le equazioni del sistema

Esempio 2

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$



$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$



A ammette l'inversa A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}N$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



**svolgendo il prodotto righe
per colonne tra matrici**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esempio 3

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

sistema lineare quadrato omogeneo di ordine 3
(3 equazioni nelle 3 incognite x, y, z)



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -6 - 2 + 1 + 6 = -1 \neq 0$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$



teorema di Cramer

il sistema ammette una ed una sola soluzione



sistema omogeneo

$$(x = 0, y = 0, z = 0)$$



l'unica soluzione del sistema è quella banale